

ĐỀ THI HSG LỚP 9 – QUẬN 9 (2015-2016)

Thời gian: 120 phút

Bài 1: (1,5 điểm)

Rút gọn biểu thức : $A = \left(\frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{xy}+1} + \frac{\sqrt{xy}+\sqrt{x}}{1-\sqrt{xy}} + 1 \right) : \left(1 - \frac{\sqrt{xy}+\sqrt{x}}{\sqrt{xy}-1} - \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{xy}+1} \right)$ ($x, y > 1$)

Bài 2: (3 điểm) Giải các phương trình và hệ phương trình sau:

a) $(2x^2 - 3x + 1)(2x^2 + 5x + 1) = 9x^2$

b)
$$\begin{cases} xy + x - y = 7 \\ yz - y + z = 13 \\ zx - x - z = 7 \end{cases}$$

Bài 3: (2 điểm)

a) Cho $x, y \neq 0$. Chứng minh rằng: $\frac{x^2}{y^2} + \frac{y^2}{x^2} - 3\left(\frac{x}{y} + \frac{y}{x}\right) + 4 \geq 0$.

b) Cho a, b là các số dương thỏa mãn điều kiện $a + b = 1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$P = a^3 + b^3 + \frac{1}{ab}$$

Bài 4: (2,5 điểm)

Trong ΔABC lấy điểm O sao cho $ABO = ACO$. Gọi H, K lần lượt là hình chiếu của O lên AB, AC .

a) Chứng minh: $\frac{OB}{OC} = \frac{\sin OAB}{\sin OAC}$.

b) Gọi M, N lần lượt là trung điểm của BC, HK . Chứng minh rằng: MN vuông góc với HK .

Bài 5: (1 điểm)

Trong một xưởng hàn người ta tiện các chi tiết máy từ các phôi thép. Một phôi thép tiện được 1 chi tiết. Từ các phần thừa của ba phôi thép đã được tiện người ta có thể nấu lại và nhận được đúng một phôi thép. Hỏi rằng từ 100 phôi thép người ta có thể làm được bao nhiêu chi tiết máy? Giải thích.

 **HẾT** 

Hướng Dẫn Giải:
ĐỀ THI HSG LỚP 9 –
QUẬN 9 – (2015-2016)

Bài 1: (1,5 điểm)

Rút gọn biểu thức : $A = \left(\frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{xy}+1} + \frac{\sqrt{xy}+\sqrt{x}}{1-\sqrt{xy}} + 1 \right) : \left(1 - \frac{\sqrt{xy}+\sqrt{x}}{\sqrt{xy}-1} - \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{xy}+1} \right) \quad (x, y > 1)$

$$\begin{aligned} A &= \left(\frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{xy}+1} + \frac{\sqrt{x}+1}{1-\sqrt{xy}} \right) : \left(\frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{xy}-1} - \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{xy}+1} \right) \\ &= (\sqrt{x}+1) \left(\frac{1}{\sqrt{xy}+1} + \frac{1}{1-\sqrt{xy}} \right) : (\sqrt{x}+1) \left(\frac{1}{\sqrt{xy}-1} - \frac{1}{\sqrt{xy}+1} \right) \\ &= \frac{2}{1-xy} : \frac{2\sqrt{xy}}{1-xy} \\ &= \frac{1}{\sqrt{xy}} \end{aligned}$$

Bài 2: (3 điểm) Giải các phương trình và hệ phương trình sau:

a) $(2x^2 - 3x + 1)(2x^2 + 5x + 1) = 9x^2$

Đặt $t = 2x^2 + x + 1$, phương trình trở thành:

$$(t - 4x)(t + 4x) = 9x^2 \Leftrightarrow t^2 - 16x^2 = 9x^2 \Leftrightarrow t^2 = 25x^2 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 5x \\ t = -5x \end{cases}$$

TH1: $t = 5x \Rightarrow 2x^2 + x + 1 = 5x \Leftrightarrow 2x^2 - 4x + 1 = 0 \Leftrightarrow x = 1 \pm \frac{\sqrt{2}}{2}$

TH2: $t = -5x \Rightarrow 2x^2 + x + 1 = -5x \Leftrightarrow 2x^2 + 6x + 1 = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{3}{2} \pm \frac{\sqrt{7}}{2}$

b)
$$\begin{cases} xy + x - y = 7 \\ yz - y + z = 13 \\ zx - x - z = 7 \end{cases}$$

$$\begin{cases} xy + x - y = 7 \\ yz - y + z = 13 \\ zx - x - z = 7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x-1)(y+1) = 6 \\ (y+1)(z-1) = 12 \\ (z-1)(x-1) = 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x-1)(y+1) = 6 \\ (y+1)(z-1) = 12 \\ (z-1)(x-1) = 8 \\ (x-1)(y+1)(z-1) = \pm 24 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z-1 = 4 \\ x-1 = 2 \text{ hay } \\ y+1 = 3 \end{cases} \begin{cases} z-1 = -4 \\ x-1 = -2 \\ y+1 = -3 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} z = 5 \\ x = 3 \text{ hay} \\ y = 2 \end{cases} \begin{cases} z = -3 \\ x = -1 \\ y = -4 \end{cases}$$

Bài 3: (2 điểm)

a) Cho $x, y \neq 0$. Chứng minh rằng: $\frac{x^2}{y^2} + \frac{y^2}{x^2} - 3\left(\frac{x}{y} + \frac{y}{x}\right) + 4 \geq 0$.

Ta có: $\frac{x^2}{y^2} + \frac{y^2}{x^2} - 3\left(\frac{x}{y} + \frac{y}{x}\right) + 4 \geq 0 \Leftrightarrow \left(\frac{x}{y} + \frac{y}{x}\right)^2 - 3\left(\frac{x}{y} + \frac{y}{x}\right) + 2 \geq 0 \Leftrightarrow \left(\frac{x}{y} + \frac{y}{x} - 1\right)\left(\frac{x}{y} + \frac{y}{x} - 2\right) \geq 0$
 $\Leftrightarrow \frac{x^2 + y^2 - xy}{xy} \cdot \frac{x^2 + y^2 - 2xy}{xy} \geq 0 \Leftrightarrow \frac{[x^2 + y^2 + (x - y)^2](x - y)^2}{2x^2y^2} \geq 0$ (bất đẳng thức đúng với $x, y \neq 0$)

b) Cho a, b là các số dương thỏa mãn điều kiện $a + b = 1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$P = a^3 + b^3 + \frac{1}{ab}$$

Ta có: $P = a^3 + b^3 + \frac{1}{ab} = (a + b)^3 - 3ab(a + b) + \frac{1}{ab} = 1 - 3ab + \frac{1}{ab}$ (vì $a + b = 1$)

Áp dụng bất đẳng thức Cô-si cho hai số dương, ta có:

$$16ab + \frac{1}{ab} \geq 2\sqrt{16ab \cdot \frac{1}{ab}} \Leftrightarrow 16ab + \frac{1}{ab} \geq 8 \quad (1)$$

Áp dụng bất đẳng thức Cô-si cho hai số dương, ta có:

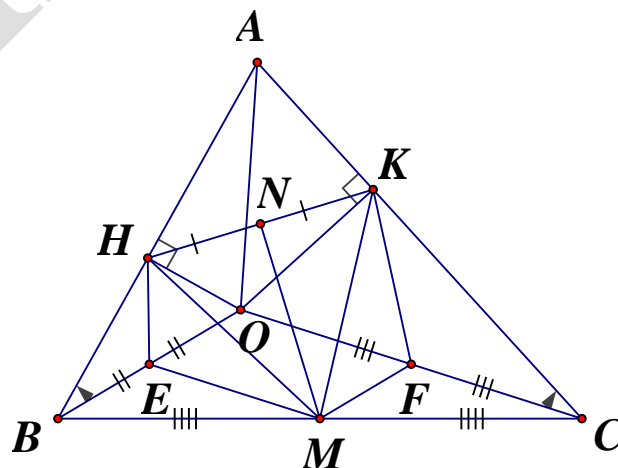
$$a + b \geq 2\sqrt{ab} \Leftrightarrow 1 \geq 2\sqrt{ab} \Leftrightarrow ab \leq \frac{1}{4} \Leftrightarrow -19ab \geq \frac{-19}{4} \quad (2)$$

Từ (1) và (2), ta suy ra: $-3ab + \frac{1}{ab} \geq 8 - \frac{19}{4} \Leftrightarrow -3ab + \frac{1}{ab} + 1 \geq 8 - \frac{19}{4} + 1 \Leftrightarrow P \geq \frac{17}{4}$

Vậy giá trị nhỏ nhất của P là $\frac{17}{4}$. Dấu “=” xảy ra khi $a = b = \frac{1}{2}$.

Bài 4: (2,5 điểm)

Trong ΔABC lấy điểm O sao cho $ABO = ACO$. Gọi H, K lần lượt là hình chiếu của O lên AB, AC .



a) Chứng minh: $\frac{OB}{OC} = \frac{\sin OAB}{\sin OAC}$.

Ta có: $\frac{OB}{OC} = \frac{\frac{OH}{\sin OBH}}{\frac{OH}{\sin OCK}} = \frac{OH}{OK} = \frac{OA \sin OAH}{OA \sin OAK} = \frac{\sin OAB}{\sin OAC}$

b) Gọi M, N lần lượt là trung điểm của BC, HK. Chứng minh rằng: MN vuông góc với HK.
Gọi E, F lần lượt là trung điểm của OB, OC.

Để chứng minh được tứ giác MEOF là hình bình hành. $\Rightarrow MEO = MFO$

Ta chứng minh được: $\begin{cases} OEH = 2OBA \\ OFK = 2OCA \end{cases}$ mà $OBA = OCA$ (gt) nên $OEH = OFK$

Ta có: $\begin{cases} MEO = MFO \\ OEH = OFK \end{cases} \Rightarrow MEO + OEH = MFO + OFK \Rightarrow MEH = MFK$

Từ đó chứng minh được $\triangle MEH = \triangle MFK$ (c - g - c) $\Rightarrow MH = MK \Rightarrow \triangle MHK$ cân tại M
Mà MN là đường trung tuyến (N là trung điểm của HK)
Nên MN là đường cao của $\triangle MHK \Rightarrow MN \perp HK$.

Bài 5: (1 điểm)

Trong một xưởng hàn người ta tiện các chi tiết máy từ các phôi thép. Một phôi thép tiện được 1 chi tiết . Từ các phần thừa của ba phôi thép đã được tiện người ta có thể nấu lại và nhận được đúng một phôi thép. Hỏi rằng từ 100 phôi thép người ta có thể làm được bao nhiêu chi tiết máy? Giải thích.

Từ 100 phôi thép ta lấy ra 3 phôi thép làm ra 3 chi tiết máy và thu lại 1 phôi thép. Như vậy, còn lại $100 - 3 + 1 = 98$ phôi thép.

Tiếp tục, ta lấy ra 3 phôi thép làm ra 3 chi tiết máy và thu lại 1 phôi thép, như vậy còn lại 96 phôi thép. ... cứ tiếp tục như thế, cuối cùng chỉ còn lại 2 phôi thép và làm ra đúng 2 chi tiết máy.

Số lượt làm ra 3 chi tiết máy là $(100 - 2) : 2 = 49$

Số chi tiết máy làm được là : $49.3 + 2 = 149$

✿ HẾT ✿